

CORRIGÉ 1

- ①  $v_1$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation différentielle  $(E_1)$  :  $v' = -0,2v$ ,  
donc est de la forme  $v_1(t) = Ce^{-0,2t}$  pour un certain  $C \in \mathbb{R}_+$ .  
Or  $v_1(0) = 100$  donc  $C = 100$  et  $v_1(t) = 100e^{-0,2t}$
- ②  $v_2$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation différentielle  $(E_2)$  :  $v' = 9,8 - 0,2v$ ,  
donc est de la forme  $v_2(t) = a(t) + b(t)$  où  $a$  est la solution constante de l'équation différentielle  $(E_2)$   
et  $b$  est solution de l'équation différentielle  $(E_1)$ .  
On a donc  $v_2(t) = \frac{9,8}{0,2} + Ce^{-0,2t} = 49 + Ce^{-0,2t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour un certain  $C \in \mathbb{R}$ .  
Or  $v_2(0) = 0$  donc  $C = -49$  et  $v_2(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$

- ③ (a) Soit  $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) = \|\vec{V}(t)\|^2 = v_1(t)^2 + v_2(t)^2 \text{ car le repère est orthonormé.}$$

$$f(t) = (-100e^{-0,2t})^2 + (49(1 - e^{-0,2t}))^2 = 10000e^{-0,4t} + 2401(1 - 2e^{-0,2t} + e^{-0,4t})$$

$$f(t) = 12401e^{-0,4t} - 4802e^{-0,2t} + 2401$$

(b)  $f(0) = 12401e^0 - 4802e^0 + 2401 = 10000 \text{ m.s}^{-1}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,4t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,2t = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\text{donc par composition, on déduit } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,4t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0,$$

$$\text{puis, par somme de limites, } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2401 \text{ m.s}^{-1}$$

- (c)  $t \rightarrow e^{-0,2t}$  et  $t \rightarrow e^{-0,4t}$  sont toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  par composition d'une fonction linéaire (dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}_+$ ) suivie de la fonction exponentielle dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de fonctions dérivables et

$$f'(t) = 12401 \times (-0,4e^{-0,4t}) - 4802 \times (-0,2e^{-0,2t}) = -4960,4e^{-0,4t} + 960,4e^{-0,2t}$$

$$f'(t) = e^{-0,2t}(960,4 - 4960,4e^{-0,2t})$$

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$f'(t) > 0 \iff e^{-0,2t}(960,4 - 4960,4e^{-0,2t}) > 0 \iff 960,4 - 4960,4e^{-0,2t} > 0 \text{ car } e^{-0,2t} > 0$$

$$f'(t) > 0 \iff e^{-0,2t} < \frac{960,4}{4960,4}$$

$$f'(t) > 0 \iff -0,2t < \ln\left(\frac{2401}{12401}\right) \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$f'(t) > 0 \iff t > 5 \ln\left(\frac{12401}{2401}\right)$$

Posant  $\alpha = 5 \ln\left(\frac{12401}{2401}\right) \simeq 8,21$  secondes, on a :

$t$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(t)$		0	+
$f$	10000	$f(\alpha) \simeq 1936$	2401

- (d)  $f$  est une fonction positive, ce qui permet de définir par composition sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $h$  par  $h(t) = \sqrt{f(t)}$ .

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , les fonctions  $f$  et  $h$  ont les mêmes

variations.

$t$	0	$\alpha$	$+\infty$
$h$	100	$h(\alpha) \approx 44$	49

- (e) À  $t = \alpha \approx 8,21$  secondes (à un centième de seconde près), la vitesse est minimale et vaut environ  $44 \text{ m.s}^{-1}$  à  $1 \text{ cm.s}^{-1}$  près.

## CORRIGÉ 2

- ① Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$f(t)$  est la fréquence des personnes connaissant la rumeur.

Donc  $1 - f(t)$  est la fréquence des personnes ne connaissant pas la rumeur.

La vitesse de propagation est proportionnelle à ces deux fréquences, avec un coefficient de proportionnalité de 1,15, donc

$$f'(t) = 1,15f(t)(1 - f(t)),$$

ce qui revient à dire que  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $y' = 1,15y(1 - y)$ .

D'autre part,  $f(0) = \frac{100}{10000} = 0,01$

- ② (a)  $f$  est dérivable et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $g = \frac{1}{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\text{et } g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{1,15f(t)(1 - f(t))}{f(t)^2} = -1,15\frac{1 - f(t)}{f(t)} = -\frac{1,15}{f(t)} + 1,15 = -1,15g(t) + 1,15$$

Donc  $g$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' = -1,15y + 1,15$

- (b) Donc  $g$  est de la forme  $g(t) = u(t) + v(t)$  où  $u$  est la solution constante de l'équation différentielle (E') et  $v$  est solution de l'équation différentielle (E'') :  $y' = -1,15y$ .

On a donc  $g(t) = 1 + Ce^{-1,15t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour un certain  $C \in \mathbb{R}$ .

Or  $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{0,01} = 100$  donc  $C = 99$  et  $g(t) = 1 + 99e^{-1,15t}$

Finalement,  $f(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-1,15t}}$

- ③ (a) Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$f'(t) = 1,15f(t)(1 - f(t)) = \frac{1,15}{1 + 99e^{-1,15t}} \left(1 - \frac{1}{1 + 99e^{-1,15t}}\right) = \frac{1,15 \times 99e^{-1,15t}}{(1 + 99e^{-1,15t})^2} > 0$$

$t$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f$	0,01	1

- (b)  $f(4) = \frac{1}{1 + 99e^{-1,15 \times 4}} = \frac{1}{1 + 99e^{-4,6}} \approx 50\%$  à 1% près.

- (c) Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$f(t) = 0,99 \iff \frac{1}{1 + 99e^{-1,15t}} = 0,99 \iff 1 + 99e^{-1,15t} = \frac{100}{99} \iff e^{-1,15t} = \frac{1}{99^2}$$

$$f(t) = 0,99 \iff -1,15t = \ln\left(\frac{1}{99^2}\right) \text{ car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$f(t) = 0,99 \iff t = \frac{1}{1,15} \ln(99^2) = \frac{2}{1,15} \ln 99 = \frac{40}{23} \ln 99 \approx 8 \text{ h à 1 min près.}$$

À 16h, 99% de la population connaît la rumeur.